出題負責教師：蔣祥第 98

建國科技大學 九十九學年度第一學期 班級：機械二 科目： 工程數學 (期中考) 考試試題

** 註：關書、不可使用計算機 班級：機械二甲 學號：98401040 姓名：黃柏萱

A.名詞解釋(15%)

1. linear differential equation 2.general solution

3. initial condition 4. Exact differential solution

1、若常微分方程式、因變數(y,...)及其導函數均為一次方程式者，

$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = R(x)$

2、若一n階常微分方程式之解，包含n個常數者，

3、由通解求解特解，自變數被指定在某一點之拘束條件。

4、若一微分方程式 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 為 $\phi(x,y)$ 之全微分者，

B. 試決定下列之階數、次數與線性與否。

1. $y''' - 5xy' = e^x - 1$ 三階一次，線性

2. $(y'')^3 + y = x$ 二階一次，非線性

3. $y^{(4)} + 3(\cos x)y''' + y' = 0$ 四階一次，線性

4. $y\frac{d^2y}{d^2x} + \frac{dy}{dx} = y^2 + x$ 二階一次，非線性

C. 試解下列各微分方程式

1. $y' = \frac{x+1}{3y^2-2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{3y^2-2}$

$\int [(3y^2-2)\,dy = (x+1)\,dx]$

$\int 3y^2 - 2 \cdot dy = y^3 - 2y + C$

$\int x+1 \cdot dx = \frac{x^2}{2} + x + C$

$y^3 - 2y = \frac{x^2}{2} + x + C$ #

2. $(1+\sin x)dy = y\cos x \cdot dx$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y\cdot\cos x}{1+\sin x}$

$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{1+\sin x} \cdot dx$ $\int [\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{1+\sin x} \cdot dx]$

$\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$

$\int \frac{\cos x}{1+\sin x} \cdot dx$

令 $u = 1+\sin x$

$du = \cos x \cdot dx$

$\int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|1+\sin x|$.

$\ln|y| = \ln|1+\sin x| + C$

$\ln|y| - \ln|1+\sin x| = C$

$\ln|\frac{y}{1+\sin x}| = C$ #

$y = C(1+\sin x)$

3. $(y^2+x^2)dx - xydy = 0$ （齊次）

$(y^2+x^2)dx = xy \cdot dy$ $y = v\cdot x$ $y' = v'\cdot x + v$

$\frac{y^2+x^2}{xy} = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

—11

4. $(y^2+x^2)dx + 2xydy = 0$ （正合）

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$. $\frac{\partial N}{\partial x} = 2y$. $\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ 正合

$\int y^2 + x^2 \cdot dx = y^2 \cdot x + \frac{x^3}{3} + C$

$\int 2xy \cdot dy = 2x \cdot \frac{y^2}{2} + C = xy^2 + C$

$\phi(x,y) = xy^2 + \frac{x^3}{3} + C$ #

5. $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$

$u = e^{\int -2x \cdot dx} = e^{-2\int x\cdot dx} = e^{-2\cdot\frac{x^2}{2}} = e^{-x^2}$ $\frac{1}{x^2}$

$y = x^2[\int \frac{1}{x^2} \cdot x\,dx + C]$

$= x^2 \cdot [\int x^{-2} \cdot x \cdot dx + C] = x^2[\int \frac{1}{x} \cdot dx + C]$

$= x^2 \cdot \ln x + C$ #

—10

$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

$y = \frac{1}{\mu} \cdot [\int \mu \cdot Q(x)dx + c]$

6. $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y}$

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{1}{x} \cdot y^{-1}$ $1-n = 1-(-1) = 2$

$u = e^{2\int \frac{1}{x}dx} = e^{2\cdot\ln x} = x^2$

$y = \frac{1}{u}[\int (1-n)\cdot u \cdot Q(x)\,dx + C]$

$= \frac{1}{x^2}[\int 2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx + C]$

$= \frac{1}{x^2}[2\int x^{-3}dx + C] = \frac{1}{x^2}[2\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + C]$

$= \frac{1}{x^2}[-\frac{1}{x^2} + C] = -\frac{1}{x^4} + C$ #

—3

97

出題負責教師：蔣祥第

建國科技大學 九十九學年度第一學期 班級：機械二 科目： 工程數學 (期中考) 考試試題

** 註：關書、不可使用計算機 班級：机二甲 學號：98401017 姓名：鄭人銘

A.名詞解釋(~~15~~20%)

1. linear differential equation 2.general solution

3. initial condition 4. Exact differential solution

1. $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+a_{n-2}(x)y^{(n-2)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=R(x)$

2. n階常微分方程式的解若有 n個任意常故的值，則稱為該微分方程式為通解 (general solution) ✓

3 初期(始)條件(initial condition)-由GS求解PS自變故(常為時間)被指定在"某一点"之拘束條件 ✓

4. $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

-2

B. 試決定下列之階數、次數與線性與否。

1. $y'''-5xy'=e^x-1$ 三階一次線性 ✓

2. $(y'')^3+y=x$ 二階三次非線性

3. $y^{(4)}+3(\cos x)y'''+y'=0$ 四階一次線性 ✓

4. $y\frac{d^2y}{d^2x}+\frac{dy}{dx}=y^3+x$ 二階一次非線性

C. 試解下列各微分方程式

1. $y'=\frac{x+1}{3y^2-2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{3y^2-2}$

$\int(x+1)\,dx=\int(3y^2-2)\,dy$

$\frac{x^2}{2}+x=y^3-2y+C$

$\frac{x^2}{2}+x-y^3+2y=C$ ✓

2. $(1+\sin x)dy=y\cos x\cdot dx$

$\int[\frac{dy}{y}=\frac{\cos x}{(1+\sin x)}dx]$

$\ln|y|=\ln|1+\sin x|+C$

$\ln|y|-\ln|1+\sin x|=C$

$\ln|\frac{C}{1+\sin x}|=C$

$=y(1+\sin x)=C$

$\Rightarrow y=C(1+\sin x)$

-2

3. $(y^2+x^2)dx-xydy=0$ (齊次)

令 $y=vx$

$y'=v+v'x$

$(y^2+x^2)dx=xydy$

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{1}{v}+v$

$\frac{1}{v}=v'x=\frac{dy}{dx}\cdot x$

$\frac{dy}{x}=v\,dv$

$\ln|x|=\frac{v^2}{2}+C$

$\frac{1}{2}v^2=\ln|cx|$

$v^2=2\ln|cx|$

$\frac{y^2}{x^2}=\ln|cx^2|$

$y^2=x^2\ln|cx^2|$

-2

4. $(y^2+x^2)dx+2xydy=0$ (正合)

$\frac{\partial M}{\partial y}=2y$ $\frac{\partial N}{\partial x}=2y$ (正合) ✓

$\varphi=\int(y^2+x^2)\,dx=y^2x+\frac{1}{3}x^3+C(y)$

$\varphi=\int(2xy)\,dy=y^2x+h(x)$

$\varphi=xy^2+\frac{1}{3}x^3+C$ ✓

5. $\frac{dy}{dx}-2xy=x \Rightarrow y'-2xy=x$

$\mu=e^{-\int 2x\,dx}=e^{-x^2}$

$y=\frac{1}{\mu}[\int e^{-x^2}(x)\,dx+C]$

$=\frac{1}{e^{-x^2}}(\int\frac{1}{2}e^{-x^2}+C)$

$=\frac{-1}{2}+\frac{C}{e^{-x^2}}$

$=\frac{-1}{2}+Ce^{x^2}$

$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$

$y=\frac{1}{\mu}\cdot[\int\mu\cdot Q(x)dx+c]$

6. $x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{y}$

$(\div x)\Rightarrow y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{xy}=\frac{1}{x}y^{-1}$

$\mu=e^{2\int\frac{1}{x}dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2$ ✓

$y^2=\frac{1}{\mu}[\int(1-n)\mu Q(x)dx+C]$

$=\frac{1}{x^2}[2\int x^2\cdot(\frac{1}{x})dx+C]$

$=\frac{1}{x^2}[2\int x\,dx+C]$

$=\frac{1}{x^2}[x^2+C]$

$y^2=1+Cx^{-2}$

6 / 出題負責教師：蔣祥第

建國科技大學 九十九學年度第一學期 班級：機械二 科目： 工程數學 (期中考) 考試試題

** 註：關書、不可使用計算機 班級：9f40/007 學號：9f40/007 姓名：蔣

A.名詞解釋(15%)

1. linear differential equation 2.general solution

3. initial condition 4. Exact differential solution

1、若ODE因變數(y...)及其導函數均為一次方者，稱之。例如：$a_n(x)y^{(n)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=R(x)$

2、若一n階ODE若包含n個任意常數的值者，稱之。

3、由G.S解外自變數(常為空間座標x,y,z)被指定到不同點之邊界條件)

4.若一階ODE $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ 為 $\phi(x,y)$ 全微分者，稱之。

B. 試決定下列之階數、次數與線性與否。

1. $y'''-5xy'=e^x-1$ ，3階1次，線性

2. $(y'')^3+y=x$ ，3階3次，線性

3. $y^{(4)}+3(\cos x)y'''+y'=0$ ，4階1次，線性

4. $y\frac{d^2y}{d^2x}+\frac{dy}{dx}=y^2+x$ ，2階1次，線性

C. 試解下列各微分方程式

1. $y'=\frac{x+1}{3y^2-2}$

$\int(x+1)\,dx=\int(3y^2-2)\,dy$

$\frac{1}{2}x^2+x=y^3-2y+C$

2. $(1+\sin x)dy=y\cos x\cdot dx$

$\frac{y'}{y}=\frac{\cos x}{1+\sin x}$

3. $(y^2+x^2)dx-xydy=0$ （齊次）

-15

4. $(y^2+x^2)dx+2xydy=0$ （正合）

M N

$\frac{\partial M}{\partial y}=2y$，$\frac{\partial N}{\partial x}=2y\Rightarrow$正合

$\int(y^2+x^2)\,dx=xy^2+\frac{1}{3}x^3$

$\int(2xy)\,dy=$

5. $\frac{dy}{dx}+(2x)y=x$

$M(x)=e^{\int P(2x)\,dx}=e^{x\,dx}=e^x$

$y=\frac{1}{e^x}\cdot[\int e^x\cdot x\cdot dx+C]$

$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$

$y=\frac{1}{\mu}\cdot[\int\mu\cdot Q(x)dx+c]$

6. $x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{y}$

(EX) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{1}{x}\cdot y^{-1}$

P Q N

$M(x)=e^{\int P(n-1)\,dx}$

$=e^{-2\int\frac{1}{x}\cdot dx}$

$=-\frac{2}{x}$

出題負責教師：蔣祥第

建國科技大學 九十九學年度第一學期 班級：機械二 科目： 工程數學 (期中考) 考試試題

** 註：關書、不可使用計算機 班級：機二甲 學號：9841021 姓名：葉明憲

A.名詞解釋(15%)

1. linear differential equation 2.general solution

3. initial condition 4. Exact differential solution

1. 特解
2. 特解
3. 特解
4. 特解

B. 試決定下列之階數、次數與線性與否。

1. $y''' - 5xy' = e^x - 1$ 3階一次 線性
2. $(y'')^3 + y = x$ 2階3次 非線性
3. $y^{(4)} + 3(\cos x)y''' + y' = 0$ 4階一次非線性
4. $y\frac{d^2y}{d^2x} + \frac{dy}{dx} = y^2 + x$ 二階2次非線性

C. 試解下列各微分方程式

1. $y' = \frac{x+1}{3y^2 - 2}$

2. $(1+\sin x)dy = y\cos x \cdot dx$

3. $(y^2 + x^2)dx - xydy = 0$ （齊次）

4. $(y^2 + x^2)dx + 2xydy = 0$ （正合）

5. $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

$$y = \frac{1}{\mu} \cdot [\int \mu \cdot Q(x)dx + c]$$

6. $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y}$

出題負責教師：蔣祥第

建國科技大學 九十九學年度第一學期 班級：機械二 科目： 工程數學 (期中考) 考試試題

** 註：關書、不可使用計算機 班級：机二甲 學號：98401041 姓名：陳綉縈

A.名詞解釋(15%)

1. linear differential equation 2.general solution

3. initial condition 4. Exact differential solution

1、

2、若-DE為Y全微分

3、

4、

B. 試決定下列之階數、次數與線性與否。

1. $y''' - 5xy' = e^x - 1$ ⇒ 3階一次，非線性

2. $(y'')^3 + y = x$ ⇒ 2次 一次，線性

3. $y^{(4)} + 3(\cos x)y''' + y' = 0$ 4階3次，非線性

4. $y\frac{d^2y}{d^2x} + \frac{dy}{dx} = y^2 + x$ ⇒ 2階一次，線性

C. 試解下列各微分方程式

1. $y' = \frac{x+1}{3y^2-2} = \frac{dy}{dx}$

$\int[(3y^2-2)dy = (x+1)dx]$

$\int 3y^2 - 2 \cdot dy = y^3 - 2y + C$

$\int x+1 \cdot dx = \frac{x^2}{2} + x + C$

$y^3 - 2y = \frac{x^2}{2} + x + C$

2. $(1+\sin x)dy = y\cos x \cdot dx$

$\int \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$

令 $u = 1+\sin x$

$du = \cos x\,dx$

$\ln|y| = \int \frac{1}{u}du + C$

$= \ln|u| + C$

$= \ln|1+\sin x| + C$

3. $(y^2+x^2)dx - xydy = 0$ （齊次）

4. $(y^2+x^2)dx + 2xydy = 0$ （正合）

5. $\frac{dy}{dx} - \frac{2xy}{P} = \frac{x}{Q}$

$\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -2x\,dx}$

$= e^{-x^2}$

$y = \frac{1}{\mu}[\int \mu \cdot Q(x)dx + C]$

$= \frac{1}{\mu}[\int e^{-x^2} \cdot x \cdot dx + C]$

令 $u = -x^2$

$du = -2x\,dx$

$-\int e^u \frac{du}{-2}$

$= \frac{1}{-2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

$y = \frac{1}{e^{-x^2}}[\int -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C]$

$= -\frac{1}{2} + \frac{C}{e^{-x^2}}$

$= \frac{1}{2} + Ce^{x^2}$

$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

$y = \frac{1}{\mu} \cdot [\int \mu \cdot Q(x)dx + c]$

6. $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y}$

$(\div x)\ \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}(y^{-1})$

$1-n = 2$

令 $u = y^{1-n} = y^2$

$y = \frac{1}{\mu}[(1-n)\int \mu \cdot Q \cdot dx + C]$

$= \frac{1}{x^2}[\int 2 \cdot x^2(\frac{1}{x})dx + C] = \frac{1}{x^2}[x^2 + C]$

$= 1 + Cx^{-2}$

$M = e^{\int (1-n)\cdot P(x)\,dx}$

$= e^{\int 2(\frac{1}{x})dx}$

$= e^{2\ln x} = e^{\ln x^2}$

$= x^2$